

Lösungen FÜMO 12 1. Runde Klassenstufe 5

Aufgabe 1 (Lösung):

- a) Für 120 Tafeln erhält man 120 Marken, dafür erhält man $120:8 = 15$ neue Tafeln, die wiederum 15 neue Marken enthalten. Für 8 davon erhält man **eine** weitere Tafel mit einer Marke. Mit dieser und den restlichen 7 bekommt man nochmals **eine** Tafel, deren Marke übrigbleibt. Also erhält man insgesamt 17 Gratistafeln.
- b) 2003 Tafeln liefern $2003 = 250 \cdot 8 + 3$ Marken, also **250** neue Tafeln. Damit hat man insgesamt $3 + 250 = 31 \cdot 8 + 5$ Marken. Mit den **31** Tafeln hat man nun $5 + 31 = 4 \cdot 8 + 4$ Marken, also **4** weitere Tafeln. Damit hat man $4 + 4 = 8$ Marken, die zu **einer** weiteren Tafel führen. Also erhält man insgesamt 286 Gratistafeln.

Aufgabe 2 (Lösung):

- a) Für den Kopf kommen die Zahlen von 10 bis 99, also 90 Zahlen in Frage. Für den Körper kommen die Zahlen von 100 bis 999 in Frage, also 900 Zahlen. Da es zu jeder Kopfzahl jeweils 900 Körperzahlen gibt, gibt es $90 \cdot 900 = 81000$ Schlangen dieser Form.
- b) Als Kopfzahl erhält man wegen Quersumme = 5 folgende Möglichkeiten: 14, 23, 32, 41, 50; als Körperzahl (QS = 6): 105, 114, 123, 132, 141, 150, 204, 213, 222, 231, 240, 303, 312, 321, 330, 402, 411, 420, 501, 510, 600, also 21 Möglichkeiten. Damit gibt es $5 \cdot 21 - 2 = 103$ weitere Familienmitglieder.
- c) Hier gibt es mehrere Lösungen, zwei davon seien genannt:
Wählt man QS = 2 für die Kopfzahl und QS = 2 für die Körperzahl, so erhält man mit den Kopfzahlen 20 und 11 und den Körperzahlen 101, 110 und 200 genau 6 Schlangen in dieser Familie.
Wählt man QS = 6 für die Kopfzahl und QS = 1 für die Körperzahl, so erhält man mit den Kopfzahlen 15, 24, 33, 42, 51 und 60 und der Körperzahl 100 genau 6 Schlangen in dieser Familie.

Aufgabe 3 (Lösung):

Anja führt zunächst zwei Wägungen aus, bei der 1. Wägung vergleicht sie Kugel 1 mit Kugel 2, bei der 2. Wägung Kugel 2 mit Kugel 3.

1. Wägung:

a) ① ② oder b) ① ② oder c) ① ②

2. Wägung:

a) ② ③ oder b) ② ③ oder c) ② ③

Im Fall 1a) und 2a) sind die Kugeln 1, 2 und 3 bereits gleich schwer, ein Vergleich von 3 mit 4 zeigt, ob 1, 2 und 3 die leichteren oder die schweren Kugeln sind.

3. Wägung:

a) ③ ④ oder b) ③ ④

In allen anderen Fällen (z.B. 1a), 2c)) hat Anja entweder **zwei schwere** Kugeln (z.B. 1, 2) und eine leichte (3) oder **zwei leichte** Kugeln und eine schwere. Mit der 3. Wägung muss sie also die fehlende **dritte schwere** bzw. **dritte leichte** Kugel finden. Deshalb vergleicht sie Kugel 4 mit 5:

3. Wägung:

a) ④ ⑤ oder b) ④ ⑤ oder c) ④ ⑤

Im Fall 3a) muss Kugel 6 zu den zwei schweren bzw. zu den zwei leichten Kugeln gehören.

In den Fällen 3b) und 3c) ist entweder 4 oder 5 die fehlende dritte Kugel. Die Kugel 6 hat dann das Gewicht der anderen beiden Kugeln.

Die leichteren Kugeln müssen dann 200 g, die schwereren 220 g wiegen.

2

3

1

3

1

2

3

Lösung der Aufgabe 3 mit einer Tabelle:

Wir nummerieren die Kugel mit 1, 2, 3, 4, 5 und 6.

„1 < 2“ soll bedeuten: „Kugel Nummer 1 ist leichter als Kugel Nummer 2“

„1 = 2“ soll bedeuten: „Die Kugeln Nummer 1 und Nummer 2 sind gleich schwer.“

„1 > 2“ soll bedeuten: „Kugel Nummer 1 ist schwerer als Kugel Nummer 2“

1. Wägung: Kugel 1 und 2									
1 > 2 → 2. Wägung: Kugel 3 und 4			1 = 2 → 2. Wägung: Kugel 1 und 3				1 < 2 → Wir benennen die Kugeln um, aus Kugel 1 wird Kugel 2 und umgekehrt. Dann weiter wie im Fall 1 > 2!		
3 > 4		3 = 4		3 < 4 → 3 und 4 um- be- nen- nen	1 > 3		1 = 3		1 < 3 → ana- log wie Fall 1>3 wei- ter
→ 1,3 schwer 2,4 leicht, 5 ≠ 6		→ 1 schwer, 2 leicht, 3=4, 5=6			→ 1,2 schwer 3 leicht		→ 1 = 2 = 3 4 = 5 = 6		
3. Wägung: Kugel 5 und 6		3. Wägung: Kugel 3 und 5			3. Wägung: Kugel 4 und 5			3. Wägung: Kugel 1 und 4	
5 > 6	5 < 6	3 > 5	3 < 5		4 > 5	4 = 5	4 < 5	1 > 4	1 < 4
1,3,5 schwer	1,3,6 schwer	1,3,4 schwer	1,5,6 schwer		1,2,4 schwer	1,2,3 schwer	1,2,5 schwer	1,2,3 schwer	4,5,6 schwer
2,4,6 leicht	2,4,5 leicht	2,5,6 leicht	2,3,4 leicht		3,5,6 leicht	4,5,6 leicht	3,4,6 leicht	4,5,6 leicht	1,2,3 leicht

Die leichteren Kugeln wiegen dann 200 g, die schwereren 220 g.