Lösungen FÜMO 16 1. Runde Klassenstufe 8

Aufgabe 1 (Lösung)

Man betrachtet zunächst die Nummern der Punkte P(x;0) auf der x-Achse:
Ist x gerade, so gilt:
$N = 2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 + ... + 2\cdot(x-1) + 2\cdot x$ (ohne Achsen) $+ 2\cdot x/2$ (beide Achsen) + 1 (der erste Punkt hat die Nummer 0) $= 2\cdot(x+1)\cdot x/2 + x + 1 = (x+1)\cdot x + (x+1) = (x+1)^2$.
Ist x ungerade, so kann man schreiben: $x = (x-1) +1$. Die Nummer N' für die gerade Zahl (x-1) beträgt dann $(x\text{-}1+1)^2 = x^2$, also hat x die Nummer $N = N' + 1 = x^2+1$.
Analog erhält man die Nummern der Punkte P(0;y) auf der y-Achse. 5

Nummer N der Punkte auf der x-Achse:		Nummer N der Punkte auf der y-Achse:	
x gerade	$N=(x+1)^2$	y ungerade	$N=(y+1)^2$
x ungerade	$N=x^2+1$	y gerade und y>0	$N=y^2+1$

a) $44^2 = 1936$ $45^2 = 2025$ $\widehat{=}$ x = 44 N = 2007 $\widehat{=}$ (44 / 25-7) = (44 / 18)
b) (16 / 2007) $\widehat{=}$ $N = (2007 + 1)^2 – 16 = 4032064 – 16 = 4032048$

Aufgabe 2 (Lösung)

Es gilt: S(2k–1) = k und S(2k) = –k

1. Fall: a= 2n gerade und b = 2m gerade
S(2n) + S(2m) + S(2n+2m) = –n – m – (n+m) < 0 ≠ 2007 bzw. 2008
für n∈ IN und m∈ IN
2. Fall: a = 2n–1 ungerade und b = 2m–1 ungerade 5
S(2n–1)+S(2m–1)+S(2n+2m–2) = n + m – (n+m–1) = 1 keine Lösung
3. Fall: a = 2n–1 ungerade und b = 2m gerade
S(2n–1) + S(2m) + S(2n+2m–1) = n – m + (n+m) = 2n
2n ≠ 2007 **keine Lös**.; aber 2n = 2008; n = 1004 liefert Lösungspaare (1004 ; m)
für n∈ IN und m∈ IN
4. Fall: a = 2n gerade und b = 2m–1 ungerade
S(2n) + S(2m–1) + S(2n+2m–1) = –n + m + (n+m) = 2m
2m = 2007 in IN nicht lösbar
2m = 2008 ⇒ m = 1004 liefert Lösungspaare (n;1004)
⇒ Kein Zahlenpaar erfüllt die Bedingung S(a) + S(b) + S(a + b) = 2007
⇒ Alle Zahlenpaare (n; 1004) und (1004; m) erfüllen die Bedingung
S(a) + S(b) +S(a + b) = 2008

Aufgabe 3 (Lösung)

Die Seitenlänge des Quadrats sei a.
Durch die Parallelen zu AD und CF 5
entstehen kongruente Rauten,
d.h. d(E, FD) = a:4
B ist der Schnittpunkt der Diagonalen
des Quadrats → d(B, AC) = a:2
Für den Flächeninhalt A des M's gilt:
$A = A_{ACRS} – A_{ACB} – 2\cdot A_{CRD} – A_{DEF}$
$= a^2 - \frac{1}{4}a^2 - 2\cdot\frac{1}{6}a^2 - \frac{1}{24}a^2$
$= \frac{3}{8}a^2$ = 37,5% von a²