Lösungen FüMO 19 2. Runde Klassenstufe 7

Aufgabe 1

Wir bezeichnen die sechs fraglichen Zahlen der Größe nach mit $p<q<r<s<t<u$. Gesucht ist dann die Summe $r+s$.
Wegen der Anordnung der Zahlen muss gelten: $p+q = 25$ und $t + u = 117$.
Es gibt insgesamt 15 verschiedene Summen: $p+q$, $p+r$, $p+s$, … , $q+r$, $q+s$, …, $r+s$, …, $s+t$, $s+u$ und $t+u$. Diese Summen sind der Größe nach sortiert. 5
Wenn wir alle 15 Summen addieren, erhalten wir den Wert
$S = 5p+5q+5r+5s+5t+5u = 25 + … + 117 = 980$ oder $p+q+r+s+t+u = 196$.
Somit ist $r+s = 196 – (p+q) – (t+u) = 196 – 25 – 117 =$ **54**.

Aufgabe 2

Wir betrachten das Dreieck DFC mit Basis DC und Höhe CB. Sein Flächeninhalt beträgt die Hälfte des Rechtecks. Dann setzt sich die andere Hälfte aus den Flächeninhalten der Dreiecke DAF und FBC zusammen. Entsprechend beträgt der Flächeninhalt von Dreieck BCE ebenfalls die Hälfte der Rechtecksfläche und ist gleich der Summe der Flächeninhalte der Dreiecke ECD und ABE. 5
Mit den gegebenen Werten erhalten wir (in cm^2) die Summengleichheit:
A(CDG) + A(GHJC) + A(HFJ) = 9 + A(EHG) + 35 + A(BCJ) + 6 =
A(EHG) + A(GHJC) + A(BCJ) = 9 + A(CDG) + 35 + A(HFJ) + 6.

Insbesondere ist A(CDG) + A(GHJC) + A(HFJ) = 9 + A(CDG) + 35 + A(HFJ) + 6, woraus A(GHJC) = 9 + 35 + 6 = 50 (in cm^2) folgt.

Aufgabe 3

a) Für ein magisches 3x3-Malquadrat gilt: $a \cdot b \cdot c = d \cdot e \cdot f = g \cdot h \cdot i = Z$.
$\Rightarrow$ Das Produkt aller eingetragenen Zahlen ist Z^3.
Der Produktwert $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot … \cdot 9$ enthält aber z.B. die Zahl 7 nur einmal.
Damit kann es kein solches Quadrat mit den Zahlen 1 bis 9 geben

a	b	c
d	e	f
g	h	i

b) $4096 = 2^{12}$
Da alle Zahlen Teiler der magischen Zahl sein müssen, kommen nur Zweierpotenzen in Frage. Es gibt ziemlich bekannte magische Plusquadrate, z.B. das nebenstehende. 5
Subtrahiert man in jeder Zelle 1 und verwendet die Zahlen als Exponenten, findet man ein gesuchtes Malquadrat.

2	7	6
9	5	1
4	3	8

2^1	2^6	2^5
2^8	2^4	2^0
2^3	2^2	2^7

c) Bei einer kleineren magischen Zahl muss man mit zwei Primfaktoren arbeiten.
Als kleinste Zahlen kommen 2 und 3 in Frage.
Das ist ein magisches 3x3-Malquadrat mit der kleinstmöglichen magischen Zahl
$Z = 2^3 3^3 = 216$

18	4	3
1	6	36
12	9	2

$2^1 3^2$	$2^2 3^0$	$2^0 3^1$
$2^0 3^0$	$2^1 3^1$	$2^2 3^2$
$2^2 3^1$	$2^0 3^2$	$2^1 3^0$