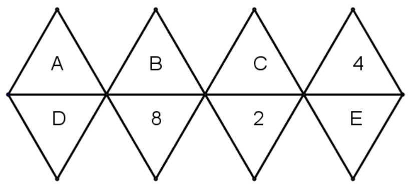
FÜMO 23 1. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1 Oktaeder

Es ist $1 + 2 + 3 + \ldots + 8 = 36$. Ein Oktaeder hat sechs Ecken. Jede Eckensumme setzt sich aus der Summe von 4 Dreiecken zusammen. Jede der 8 Seitenflächen kommt bei der "Eckensummenbildung" genau 3mal vor. Also muss die Eckensumme immer $36 \cdot 3 : 6 = 18$ sein.
Damit erhält man für die 6 Ecken 6 Gleichungen:

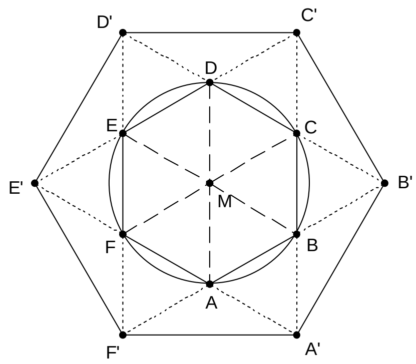
(1) $A + B + C + 4 = 18 \Leftrightarrow A + B + C = 14$
(2) $D + 8 + 2 + E = 18 \Leftrightarrow D + E = 8$
(3) $A + B + D + 8 = 18 \Leftrightarrow A + B + D = 10$
(4) $B + C + 8 + 2 = 18 \Leftrightarrow B + C = 8$
(5) $C + 4 + 2 + E = 18 \Leftrightarrow C + E = 12$
(6) $4 + A + D + E = 18 \Leftrightarrow A + D + E = 14$



Da bei Gleichung (5) für C und E nur 5 und 7 in Frage kommen, gibt es zwei Fälle:

1. Fall: $C = 5$ und $E = 7 \Rightarrow D = 1$ wegen (2) $\Rightarrow A = 6$ wegen (6) $\Rightarrow B = 3$ wegen (4)
2. Fall: $C = 7$ und $E = 5 \Rightarrow D = 3$ wegen (2) $\Rightarrow A = 6$ wegen (6) $\Rightarrow B = 1$ wegen (4)

Aufgabe 2 Riesensechseck



Da das Sechseck ABCDEF regelmäßig ist, sind die Dreiecke MAB, MBC, MCD, MEF und MFA untereinander kongruent. Wegen der Symmetrie der Konstruktion sind auch die Dreiecke AA'B und ABM, BB'C und MBC, CC'D und MCD, DD'E und MDE und EE'F und EFM jeweils zueinander kongruent. Daraus folgt die Kongruenz aller bisher genannten Dreiecke.

Deshalb ist B Mittelpunkt der Strecke [A'C] und deshalb B'B Seitenhalbierende im Dreieck A'B'C. Damit sind die Dreiecke BA'B' und AA'B flächengleich. Analog gilt dies auch für die Dreiecke CB'C', DC'D', ED'E', FE'F' und AF'A'.
Also gilt für den Flächeninhalt des Sechsecks A´B´C´D´E´F´:

$$A(A'B'C'D'E'F') = (6+6+6)\cdot \tfrac{1}{6}\,\mathrm{FE} = 3\ \mathrm{FE} = 3 \cdot A(ABCDEF)$$

Damit verdreifacht sich bei jeder Spiegelung der Flächeninhalt.
Somit erhält man als Flächeninhalt A_{23} des am Ende vorliegenden Sechsecks

$$A_{23} = 3^{23}\ \mathrm{FE} = 3^{16}\cdot 3^{7}\ \mathrm{FE} = 43046721\cdot 2187\ \mathrm{FE} =$$
$$= (86093442000+4304672100+3443737680+301327047)\ \mathrm{FE} = 94143178827\ \mathrm{FE}$$

Aufgabe 3 Zahlenhack

Wir wenden einige Teilbarkeitsregeln an.
Da die Zahl n_1 = abcde ein Vielfaches von 5 sein soll, ist $e = 5$ wegen $e \neq 0$.
Da die Zahlen n = abcdef, n_2 = abcd und n_4 = ab nach Voraussetzung gerade Teiler haben, müssen ihre jeweiligen Endziffern ebenfalls gerade sein d.h. $b, d, f \in \{2,4,6\}$.
Damit bleiben für a und c nur die Belegungen 1 oder 3.
Wir untersuchen zwei Fälle:

1. Fall: $a = 1$ und $c = 3$.
Da die Zahl n_3 durch 3 teilbar sein soll, muss ihre Quersumme $q = a+b+c = b+4$ durch 3 teilbar sein. Wegen $1 \le b \le 6$ und $b \in \{2,4,6\}$. kommt dafür nur $b = 2$ in Frage.
Nun ist n_2 ein Vielfaches von 4, daher muss die aus den beiden Endziffern cd gebildete Zahl ebenfalls durch 4 teilbar sein. Wegen der Annahme $c = 3$ und $d = 4$ oder 6 kommt dafür nur die Belegung $d = 6$ in Frage, d.h. cd = 36. Jetzt bleibt für die fehlende Ziffer f nur noch der Wert 4.
Die Zahl n = 123654 erfüllt alle Bedingungen.

2. Fall: $a = 3$ und $c = 1$.
Auch hier beträgt die Quersumme $q = b+4$ mit der Ziffer $b = 2$. Eine entsprechende Argumentation wie im 1. Fall führt schließlich auf die Zahl n = 321654.

Daher genügen die beiden Zahlen 123654 und 321654 den Bedingungen der Aufgabe.