Lösungen FÜMO 23 2. Runde Klassenstufe 7

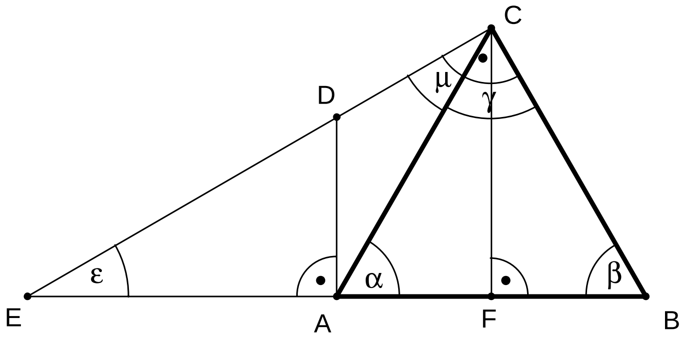
Aufgabe 1 2015 verprimelt

Die eindeutige Primfaktorzerlegung von 2015 lautet $2015 = 5 \cdot 13 \cdot 31$.
Also kann p nur eine der Zahlen 5, 13 und 31 sein.
Es sei $p = 5$. Dann ist wegen $2015 = 5 \cdot 403$: $q + r = 403$.
Da die Summe ungerade ist, muss genau einer der Summanden gerade sein. Somit ist $r = 2$, da 2 die einzige gerade Primzahl ist und $q > r$ gelten soll. Somit muss $q = 401$ sein. 401 ist eine Primzahl, was man durch das Verfahren der Probedivision schnell verifiziert.
Somit hat man eine Lösung gefunden: $p = 5$; $q = 401$; $r = 2$

Ein analoges Vorgehen für $p = 13$ bzw. $p = 31$ führt zu: $2015 = 13 \cdot 155 = 13 \cdot (153 + 2)$ bzw. $2015 = 31 \cdot 65 = 31 \cdot (63 + 2)$. Aber $153 = 3 \cdot 51$ und $63 = 7 \cdot 9$ sind keine Primzahlen.

Also gibt es nur die Lösung $p = 5$; $q = 401$; $r = 2$.

Aufgabe 2 Dreieck dreigeteilt



Sei F der Mittelpunkt von [AB] und A_1 und A_2 jeweils der Flächeninhalt der Dreiecke ACD und EAD.
Dann gilt: $CF \perp AB$, $\overline{AB} = 2\overline{AF}$.
Da das Dreieck ABC gleichseitig ist,
ist $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{AC}$ und $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

Aus $\mu + \gamma = 90°$ und $\beta + \varepsilon + 90° = 180°$ folgt
$\mu = 90° - 60° = 30°$ und
$\varepsilon = 180° - 90° - 60° = 30°$.

Also ist das Dreieck EAC gleichschenklig und es folgt $\overline{EA} = \overline{AC} = \overline{AB} = 2\overline{AF}$.

Da $\overline{EA} = \overline{AB}$, haben die Dreiecke EAD und ABC wegen der gemeinsamen Höhe [CF] den gleichen Flächeninhalt: $A_1 + A_2 = 1$.

Wegen $\overline{EA} = 2\overline{AF}$ verhalten sich die Flächeninhalte der Dreiecke DAC und EAD mit der gemeinsamen Grundlinie [AD] und den Höhen [AF] und [EA] wie 1:2,
d.h. $A_2 = 2A_1$ bzw $A_1 + A_2 = 3A_1 = 1$. Also ist $A_1 = 1/3$ und $A_2 = 2/3$.

Aufgabe 3 Figuren legen

a) Für jede neue Reihe in ihrem Dreieck braucht Maria zwei Dreiecke mehr
Sie braucht also immer $1+3+5+7+\ldots+(2k-1) = k^2$ Dreiecke.
Da $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$ keine Quadratzahl ist, kann sie kein Dreieck legen.

b) Um ein gleichschenkliges Trapez zu bekommen, bräuchte Maria $k^2 - n^2$ Dreiecke.
Es ist $k^2 - n^2 = (k-n)(k+n)$
Sind k und n beide gerade oder ungerade, sind k+n und k-n zwei gerade Faktoren. Das geht nicht, da 2014 nur einmal den Faktor 2 enthält.
Ist bei k und n eine Zahl gerade und eine ungerade, werden die Faktoren k+n und k-n beide ungerade. Auch das ist nicht möglich, da sich 2014 nicht in zwei ungerade Faktoren zerlegen lässt.

c) Für ein Parallelogramm braucht Maria für jede Reihe eine gerade Anzahl von Dreiecken.
Hierfür gibt es vier Möglichkeiten (2 ; 1007), (38 ; 53), (106 ; 19) , (2014 ; 1).