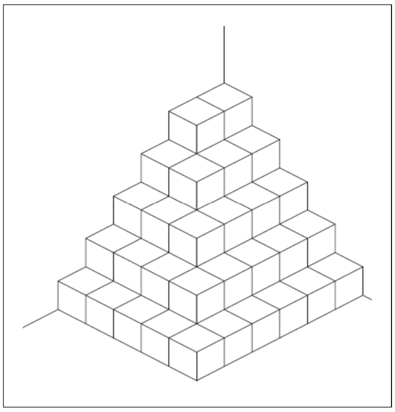
FÜMO 26 1. Runde Lösungen 7. Klasse

Aufgabe 1 Hoch stapeln



a) Einfaches Abzählen ergibt N = 6·5 + 5·4 + 4·3 + 3·2 + 2·1 = 70 Klötze.
b) Auch hier hilft genaues Zählen.
Wir stellen die Ergebnisse in einer Tabelle dar:

Rote Flächen	0	1	2	3
Würfel	40	0	25	5

c) Es gibt insgesamt 6·70 = 420 Würfelflächen.
Davon sind nach b) 2·25 + 3·5 = 65 rot.
Damit beträgt die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{65}{420} = \frac{13}{84}$.

Aufgabe 2 Wer steht bis zuletzt?

a) 26 Zahlen: 1 , ~~2~~ , 3 , ~~4~~ , … 25 , ~~26~~
Es stehen noch die 13 Kinder, deren Zahlen bei Teilung durch 2 den Rest 1 lassen
13 Zahlen: 1 , ~~3~~ , 5 , ~~6~~ , … ~~23~~ , 25
Es stehen noch die 7 Kinder, deren Zahlen bei Teilung durch 4 den Rest 1 lassen
7 Zahlen: ~~1~~ , 5 , ~~9~~ , 13 , ~~17~~ , 21 , ~~25~~
Es stehen noch die 3 Kinder, deren Zahlen bei Teilung durch 8 den Rest 5 lassen
3 Zahlen: 5 , ~~13~~ , 21, 2 Zahlen: ~~5~~ , 21
Der Teilnehmer, der als letztes noch steht, hat die Nummer 21

b) analog:
2017 Zahlen: 1 , ~~2~~ , 3 , ~~4~~ , … , ~~2016~~ , 2017,
1009 Zahlen: ~~1~~ , 3 , ~~5~~ , 7 , … , 2015 , ~~2017~~
504 Zahlen: 3 , ~~7~~ , 11 , ~~15~~ , … , 2011 , ~~2015~~,
252 Zahlen: 3 , ~~11~~ , 19 , ~~27~~ , … 2003 , ~~2011~~
126 Zahlen: 3 , ~~19~~ , 35 , ~~51~~ , … 1987 , ~~2003~~,
63 Zahlen: 3 , ~~35~~ , 67 , ~~99~~ , … ~~1955~~ , 1987
32 Zahlen: ~~3~~ , 67 , ~~131~~ , 195 , …~~1923~~ , 1987,
16 Zahlen: ~~67~~ , 195 , ~~323~~ , … ~~1859~~ , 1987
8 Zahlen: ~~195~~ , 451 , ~~707~~ , … ~~1731~~ , 1987,
4 Zahlen: ~~451~~, 963 , ~~1475~~, 1987
2 Zahlen: ~~963~~ , 1987
Der Teilnehmer, der als letztes noch steht, hat die Nummer 1987

.Aufgabe 3 Starke Potenzen

Die Zahl 9^{2017} endet auf 9.
Begründung: $9^2 = 81$ endet auf 1, dann endet aber auch 9^{2n} auf 1, also auch 9^{2016}.
Damit endet $9^{2017} = 9^{92016} \cdot 9$ auf 9.

Die gegebene Differenz ist durch 10 teilbar, wenn auch n^{2018} auf 9 endet:
Ist n eine gerade Zahl, endet n^{2018} ebenfalls auf eine gerade Zahl, kann also nicht auf 9 enden.
Für n = 1 endet 1^{2018} offensichtlich auf 1, für n = 5 endet 5^{2018} auf 5.
Für n = 3 erhält man: 3^2 endet auf 9, 3^4 endet auf 1, d.h. 3^{2+4k} endet auf 9 für $k \in N$.
Da 2018 = 2 + 4·504 endet 3^{2018} auf 9.
Für n = 7 erhält man: 7^2 endet auf 9, 7^4 endet auf 1, d.h. 7^{2+4k} endet auf 9 für $k \in N$.
Da 2018 = 2 + 4·504 endet auch 7^{2018} auf 9.
Also endet $9^{2017} - n^{2018}$ für n = 3 und n = 7 auf 0 und ist damit durch 10 teilbar.