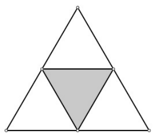
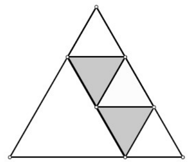
FÜMO 29 1. Runde Lösungen 7. Klasse

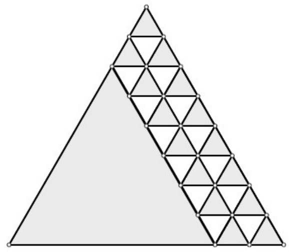
Aufgabe 1 Zerlege das Dreieck

Ein gleichseitiges Dreieck kann man in vier gleichseitige Dreiecke zerlegen, indem man die drei Mittellinien einzeichnet (n=4):



Für n=6 und n=29 findet man:





Zerlegen wir ein Dreieck innerhalb einer n-Zerlegung in vier Teile (wie die obere Abbildung für n = 4 zeigt), so erhöht sich die Gesamtanzahl von Dreiecken um 3.
Wendet man diesen Trick auf unsere drei Fälle an, so können wir ein gleichseitiges Dreieck in 4 + 3k; 6 + 3k und 8 + 3k Teile mit $k \in N_0$ zerlegen. Es gilt
(1) $29 = 8 + 3 \cdot 7 = 8 + 21$ (2) $2020 = 4 + 3 \cdot 672 = 4 + 2016$
Somit gibt es für jede der Zahlen 4, 6, 29 und 2020 mindestens eine Zerlegung.

Aufgabe 2 Karten im Karton

Wir bezeichnen die Farben jeweils mit ihrem (kleinen) Anfangsbuchstaben.
Es gilt also: b:g:r = 1:2:4 und g:v:o = 1:3:6.
Die letzte Verhältnisgleichung ist äquivalent zu g:v:o =2:6:12. Damit ist die gemeinsame Farbe g in beiden Verhältnissen gleich d.h. b:g:r = 1:**2**:4 und g:v:o = **2**:6:12.
Beide Verhältnisgleichungen lassen sich nun kombinieren d. h. b:g:r:v:o = 1:2:4:6:12.
Dies bedeutet: Zu jeder blauen Karte gehören 2 grüne, 4 rote, 6 violette und 12 orangene Tickets.
Wenn sich im Karton nur eine blaue Karte befinden sollte, dann müsste er insgesamt 1+2+4+6+12 = 25 Karten enthalten.

Im Karton befinden sich aber 400 Karten d. h. er enthält $\frac{400}{25} = 16$ blaue Karten. Nach Multiplikation mit dem Faktor 16 ergibt sich daher b:g:r:v:o = 16:32:64:96:192 und somit befinden sich im Karton 16 blaue, 32 grüne, 64 rote, 96 violette und 192 orangefarbene Eintrittskarten.

Aufgabe 3 Die letzte Ziffer

Wir können das ursprüngliche Produkt in Gruppen mit 10 Faktoren einteilen:
$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 10$; $11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot \ldots \cdot 20$; … .

Es werden also 202 Gruppen und die Zahl 2021 miteinander multipliziert.
Nach dem "Ausdünnen“ dieser Produkte, enden alle diese Produkte auf dieselbe Ziffer wie
$1 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 9$, nämlich 9.
Da $9 \cdot 9 = 81$ ist und die Anzahl der Gruppen, 202, gerade ist, ist die letzte Ziffer der Produkte jeweils 1. Somit endet das gesamte Restprodukt wie $1 \cdot 2021$ auf 1.